



UDC 622.276.054

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН З'ЄДНАННЯ СКЛОПЛАСТИКОВОЇ ОБОЛОНКИ ЗІ СТАЛЕВОЮ ГОЛОВКОЮ ПРИ КРУЧЕННІ

Максимук О.В.<sup>1</sup>, Копей Б.В.<sup>2\*</sup>, Юй Шуанжуй<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, м. Львів, 79000,

<sup>2</sup>Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, 76019, Івано-Франківськ, Карпатська 15; тел. 727101, e-mail: [kopeyb@ukr.net](mailto:kopeyb@ukr.net)

\*Відповідальний автор: e-mail [kopeyb@ukr.net](mailto:kopeyb@ukr.net).

## STRESS CONDITION OF CONNECTING THE GLASSPLASTIC SHELL WITH THE STEEL HEAD DURING TORSION

Maksimuk O.V.<sup>1</sup>, Kopej B.V.<sup>2\*</sup>, Juj Shuanzhui<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Lviv Ivan Franko National University, st. University 1, Lviv, 79000,

<sup>2</sup>Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, 76019, Ivano-Frankivsk, Carpathian 15; tel. 727101, e-mail: [kopeyb@ukr.net](mailto:kopeyb@ukr.net)

\*Corresponding author: e-mail [dichre@yahoo.com](mailto:dichre@yahoo.com), tel. +380562472348, fax: +380562473209

### ABSTRACT

**Purpose.** Analysis of the stress state of a glass-plastic compound joint with a steel head during torsion, as an example of a connection of a construction of a pump rod with a polymeric sheath.

**Methods.** The problems under consideration are reduced to the compilation of integral equations and their solution.

**Findings.** As a result, graphical dependences of the influence of the adhesive layer on the contact stress are obtained in the case of torsion of the composite shell with a rigid cage and distribution of stress along the thickness of the composite sheath connected to the rigid cage.

**Originality.** It is the use of the generalized theory of shells of the Timoshenko type for solving contact problems.

**Practical implications.** The carried out researches have allowed to develop a technique of connection of fiberglass pipes with steel heads during torsion.

**Keywords:** Pump rods, fiberglass shells, steel heads, contact stresses, mathematical model.

### 1. ВСТУП

Ефективне застосування в інженерній практиці з'єднань конструкцій насосних штанг з ПКМ (полімерних композитних матеріалів), які працюють у складних умовах контактної взаємодії, пов'язане з розв'язуванням контактної проблеми.

Складність розв'язування задачі полягає у визначенні контактних напружень у з'єднанні різнорідних елементів конструкції, що є головними характеристиками його контактної міцності і жорсткості при заданому навантаженні.

В основу досліджень, поданих у даному підрозділі, взято узагальнену теорію оболонок типу Тимошенка [1]. У роботі розглядаються деякі особливі випадки навантаження і контактної взаємодії (ідеальний контакт, через проміжний адгезійний шар).

Для розв'язування контактних задач використано методику зведення їх до інтегральних рівнянь [2].

### 2. ОСНОВНА ЧАСТИНА

**Постановка задачі.** Запропоновані схеми конструктивних з'єднань моделюються композитною циліндричною оболонкою скінченної довжини, що перебуває в контактній взаємодії з жорстким кільцевим бандажем (рис.1).

Наведемо розрахунок контактних напружень для типових випадків експлуатаційного навантаження з урахуванням особливостей умов контакту (ідеальний контакт з ефектом обтиснення або наявність клейового прошарку).

У рамках запропонованої математичної моделі розглядається кручення композитної циліндричної оболонки, яка взаємодіє на ділянці  $0 \leq \alpha \leq s$  її довжини  $l$  з жорстким бандажем (рис. 1). Для забезпечення необхідної міцності з'єднання оболонки з ПКМ зі сталеву обоймою контакт відбувається через клейовий прошарок товщини  $2h_k$ .

Несуча здатність даного конструктивного з'єднання, з огляду на умови навантаження, визначається максимальним моментом  $M$ , який прикладений до вільного торця оболонки. За заданих умов навантаження лицьових поверхонь оболонки ( $\sigma_2^+ = 0, \sigma_3^- = 0$ ) дія бандажу виявляється тільки через тангенціальну реакцію. Тут і надалі позначення відповідають роботі [3].

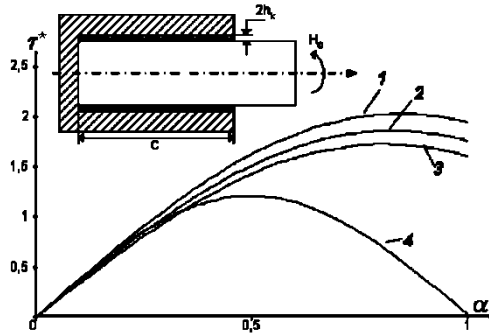


Рисунок 1. Вплив клейового прошарку на контактне напруження при крученні композитної оболонки з жорсткою обіймою

Таким чином, задача полягає у визначенні контактної дотичного напруження  $\tau(\alpha)$ , що виникає в області зчеплення  $0 \leq \alpha \leq c$  складових елементів конструкції.

У цьому випадку основні співвідношення мають вигляд:

$$\frac{dS}{d\alpha} + Q_2 = -R(\sigma_{31}^+ - \sigma_{31}^-), \quad (1)$$

$$\frac{dH}{d\alpha} - RQ_2 = -hR(\sigma_{31}^+ + \sigma_{31}^-);$$

співвідношення пружності

$$S = \frac{B_{12}}{R} \frac{dv}{d\alpha}, \quad Q_2 = \Lambda_2 \left( \gamma - \frac{1}{R} v \right) + \frac{h}{3} (\sigma_{31}^+ + \sigma_{31}^-), \quad (2)$$

$$H = \frac{D_{12}h}{R} \frac{d\gamma}{d\alpha}, \quad M = 2\pi R(H + SR),$$

де:

$\gamma = \gamma_2$  – кут повороту нормального волокна,  $v$  – переміщення в напрямку координати  $\alpha$ ,  $R$  – радіус серединної поверхні оболонки.  $S$ ,  $Q_2$ ,  $H$ ,  $M$ , – відповідні зусилля і моменти,

$$\Lambda_2 = \frac{5hG'}{3}, \quad B_{12} = \frac{Eh}{1+\nu}, \quad D_{12} = \frac{Eh^2}{3(1+\nu)}.$$

З умов задачі випливає, що в середині оболонки відсутнє навантаження  $\sigma_{31}^- = 0$ , а ззовні оболонки

$$\sigma_{31}^+(\alpha) = \begin{cases} \tau(\alpha), & 0 \leq \alpha \leq c, \\ 0, & c < \alpha \leq l, \end{cases} \quad (3)$$

де:

$\tau(\alpha)$  – невідоме контактне дотичне напруження.

З урахуванням навантаження і закріплення торців оболонки граничні умови формулюються в такий спосіб

$$\gamma = 0, \quad v = 0 \quad (\alpha = 0), \quad S = 0, \quad H = H_0 \quad (\alpha = l). \quad (4)$$

У разі наявності адгезійного шару в області контактної взаємодії оболонки і бандажу відповідно до моделі [4] умова контакту має вигляд

$$v(\alpha) = -k\tau(\alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq c), \quad (5)$$

де:

$k = 2h_k/G'_k$  – коефіцієнт, який характеризує зсувну жорсткість адгезійного шару,  $G'_k$  – модуль зсуву.

Отже, математична модель сформульованої задачі – це система диференціальних рівнянь (1) разом з умовами (4), (5).

**Метод розв'язку.** Крайову задачу (1), (4) записуємо у вигляді задачі Коші для системи рівнянь першого порядку (схему зведення див. у [5]). В описаному випадку матриця  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^4$  системи має такі відмінні від нуля елементи:

$$a_{13} = 1, \quad a_{14} = 1, \quad a_{31} = \frac{\Lambda_2 R^2}{D_{12} h}, \quad a_{32} = -\frac{l}{R} a_{31}, \quad a_{41} = -\frac{R}{l} \frac{\Lambda_2}{B_{12}}, \quad a_{42} = \frac{\Lambda_2}{B_{12}}.$$

Решта елементів матриці  $A$  дорівнюють нулю.

Вектори шуканих функцій  $Z(\alpha)$  і правої частини системи  $F(\alpha)$  тут визначаються в такий спосіб:

$$Z(\alpha) = (z_1, \dots, z_4)^T = \left( \gamma, v, \frac{d\gamma}{d\alpha}, \frac{dv}{d\alpha} \right)^T, \quad F(\alpha) = (0, 0, \mu \sigma_{31}^+, \chi \sigma_{31}^+)^T,$$

де:

$$\mu = -\frac{5}{6} \frac{R^2 E}{D_{12}}, \quad \chi = -\frac{R}{l} \frac{E}{B_{12}} \left( \frac{h}{6} + R \right), \quad \bar{v} = v/l, \quad \bar{\sigma}_{31}^+ = \sigma_{31}^+/E -$$

безрозмірні величини,  $\sigma_{31}^+$  визначається згідно (4).

Згідно вибраної методики одержуємо розв'язок крайової задачі у вигляді

$$z_i(\alpha) = \sum_{k=1}^4 C_k g_{ik}(\alpha) + \int_0^\alpha (\mu g_{i3}(\alpha-s) + \chi g_{i4}(\alpha-s)) \bar{\tau}^+(s) ds, \quad i=1, \dots, 4 \quad (6)$$

Тут  $g_{ij}(\alpha)$  – компоненти матрицанта  $G(\alpha) = e^{A\alpha}$ .

Із умов (4) при  $\alpha = 0$ , враховуючи введені позначення, випливає, що  $C_1 = C_2 = 0$ . Ще дві сталі  $C_3, C_4$  визначаються з умов (4) при  $\alpha = l$ .

На підставі формули для тангенціального переміщення в області контакту  $0 \leq \alpha \leq c$  одержуємо вираз

$$\bar{v}(\alpha) = z_2(\alpha) = C_3 g_{23}(\alpha) + C_4 g_{24}(\alpha) + \int_0^c (\mu g_{23}(\alpha-s) + \chi g_{24}(\alpha-s)) \bar{\tau}(s) ds$$

Далі, відповідно до описаної схеми розв'язування, контактна задача зводиться до інтегрального рівняння відносно  $\tau^* = \tau R^2/H_0$ ,

$$\tau^*(\alpha) + \int_0^c K(\alpha, s) \tau^*(s) ds = f(\alpha)$$

де

$$K(\alpha, s) = \frac{1}{k_0} \begin{cases} \mu g_{23}(\alpha - s) + \chi g_{24}(\alpha - s) - y_3(\alpha), & 0 \leq s \leq \alpha; \\ -y_3(\alpha), & \alpha < s \leq c, \end{cases}$$

$$y_3(\alpha) = y_1(\alpha)(\mu g_{33}(l - s) + \chi g_{34}(l - s)) + y_2(\alpha)(\mu g_{43}(l - s) - \chi g_{44}(l - s)),$$

$$y_1(\alpha) = \frac{1}{\delta} (g_{44}(l) g_{23}(\alpha) - g_{43}(l) g_{24}(\alpha)),$$

$$y_2(\alpha) = \frac{1}{\delta} (g_{33}(l) g_{24}(\alpha) - g_{34}(l) g_{23}(\alpha)),$$

$$\delta = g_{33}(l) g_{44}(l) - g_{43}(l) g_{34}(l),$$

$$f(\alpha) = \frac{R^3 E}{D_{12} h} y_1(\alpha), \quad k_0 = \frac{k E}{l}.$$

Використовуючи знайдений розв'язок, згідно з рис.2 для визначення безрозмірної величини крутного моменту  $H^* = H/H_0$  в області  $0 \leq \alpha \leq c$  одержуємо формулу

$$H^*(\alpha) = \frac{D_{12} h}{E R^3} (C_3 g_{33}(\alpha - s) + C_4 g_{34}(\alpha)) + \int_0^c (\mu g_{33}(\alpha - s) + \chi g_{34}(\alpha - s)) \tau^*(s) ds. \quad (8)$$

В області  $c \leq \alpha \leq L$  функція  $H^*(\alpha)$  має вигляд (8), лише верхня межа інтегрування  $\alpha$  замінюється на  $c$ . На підставі (2) і (6) для зсувного зусилля  $S^* = SR/H_0$  у вказаній області  $c \leq \alpha \leq L$  можемо записати

$$S^*(\alpha) = \frac{B_{12} l}{E R^2} (C_3 g_{43}(\alpha) + C_4 g_{44}(\alpha)) + \int_0^c (\mu g_{43}(\alpha - s) + \chi g_{44}(\alpha - s)) \tau^*(s) ds.$$

В області  $c < \alpha \leq L$  функція  $S^*(\alpha)$  визначається аналогічно функції  $H^*(\alpha)$  в цій області.

Враховуючи особливості композитних матеріалів щодо міцності, важливо знайти розподіл дотичних напружень  $\sigma_{12}^*$  уздовж та по товщині циліндричної оболонки. Розрахунок безрозмірної величини напруження  $\sigma_{12}^* = R^2 \sigma_{12}/H_0$  здійснювався за формулою

$$\sigma_{12}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{h} \right) S^* + \frac{3}{2} \left( \frac{R}{h} \right)^2 H \left( \frac{z}{h} \right),$$

де:

$$-h \leq z \leq h.$$

Отже, маючи розв'язки контактних задач легко виписати основні характеристики напружено-деформованого стану оболонки. Метод побудови

розв'язку контактних задач дає достатню для інженерної практики точність результатів.

На рис. 1 наведені результати розрахунку дотичних контактних напружень  $\tau^*(\alpha)$  при крученні оболонки.

Графіки побудовані для безрозмірної величини  $\tau^*(\alpha) = R^2 \tau(\alpha)/H_0$ .

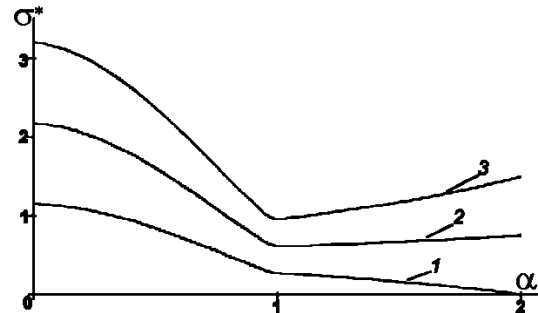


Рисунок 2. Розподіл напруження  $\sigma_{12}^*$  по товщині композитної оболонки, з'єднаної з жорсткою обоймою

Задача розв'язана для таких значень параметрів з'єднання:

$$E/G' = 7.6, \quad \nu = 0.18, \quad l/R = 2, \quad h/R = 1, \quad c/R = 1, \quad h_k/h = 0.001, \quad E = 19 \text{ ГПа}.$$

Криві 1–4 побудовані для значень параметра  $G'_k = 0.95, 1.0, 1.05, 2.8$  ГПа відповідно.

На рис. 2 зображені графіки розподілу напруження  $\sigma_{12}^*$  по товщині композитної оболонки вздовж осової координати  $\alpha$ . Криві 1–3 побудовані при  $z = 0, 0.5, 1.0$  відповідно, де  $\bar{z} = z/h$ . З поданих на рис. 2 графіків можна зробити висновок, що максимум контактного напруження  $\tau^*(\alpha)$  досягається на деякій відстані від жорстко закріпленого краю, причому зі збільшенням  $G'_k$  концентрація  $\tau^*$  зменшується, а максимум при цьому спостерігається ближче до закріпленого краю.

### 3. ВИСНОВКИ

Запропонована методика розв'язування контактних задач зручна в застосуванні, запропонована її програмна реалізація, що дає змогу виконувати багатопараметричний аналіз розрахункових величин.

На підставі проведених досліджень створений ряд промислових зразків насосних штанг із ПКМ [6], що у порівнянні зі сталевими мають значні переваги: дають змогу підвищити опірність корозійній дії агресивних середовищ, істотно скоротити їхню аварійність при експлуатації.

### ВДЯЧНІСТЬ

Автори висловлюють подяку Щербині Наталії Миколаївні, старшому науковому співробітнику Інституту прикладної механіки та математики НАУ за теоретичні проробки, які містить стаття.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. Peleh B.L., Suhorol's'kij M.A. (1980). Kontaktne zadachi teorii uprugih anizotropnyh obolochek. *Nauk. Dumka.* 216.
2. Kopej B., Kindrachuk S., Maksimuk O., Shherbina N. (1998). Kontaktna zhorstkist' konstruktyvnogo z'jednannja kompozitnoi obolonky pry kruchenni. *Mashynoznavstvo.* 11. 2-5.
3. Kopej B.V., Maksymuk O.V., Shherbina N.M., Rozgonjuk V.V. & Kopej V.B. (2003). Nasosni shtangy ta truby z polimernyh kompozytiv: proektuvannja, rozrahunok, vyprobuvannja. *NAN Ukrai'ny IPPMM im. Ja.S. Pidstrygacha.* 352.
4. Maksymuk O.V., Mahnic'kyj R.M. & Shherbina N.M. (2005). Matematychni modeljuvannja ta metody rozrahunku tonkostinnyh kompozytnyh konstrukcij. *NAN Ukrai'ny IPPMM im. Ja.S. Pidstrygacha.* 396.
5. Peleh B.L., Maksymuk A.V. & Korovajchuk Y.M. (1988). Kontaktne zadachi dlja sloistyh jelementov konstrukcij i tel s pokrytjamy. *Nauk.dumka.* 280.
6. B. V. Kopej, Juj Shuanzhuj & V. I. Orlenko. (2017). Skinchenno-elementnyj analiz z'jednannja skloplastikovoi nasosnoi shtangy. *Materialy Vseukrai'ns'koi naukovo-tehnicnoi konferencii «Nafta i gaz. Nauka-osvita-vyrobnytvo: shljahy integracii ta innovacijnoho rozvytku».* 104-109.

## ABSTRACT (IN UKRAINIAN)

**Мета.** Аналіз напруженого стану з'єднання склопластикової оболонки зі сталеву головою при крученні на прикладі з'єднання конструкції насосних штанг з полімерною оболонкою.

**Методика.** Розглянуті проблеми зводяться до складання інтегральних рівнянь і їх розв'язання.

**Результати.** В результаті побудовані графічні залежності впливу клейового шару на контактне напруження при крученні композитної оболонки з жорсткою обіймою і розподілу напруги по товщині композитної оболонки, з'єднаної з жорсткою обіймою.

**Наукова новизна.** Полягає у використанні узагальненої теорії оболонок типу Тимошенка для розв'язання контактних задач.

**Практична значимість.** Проведені дослідження дозволили розробити методику з'єднання склопластикових труб зі сталевими головками при крученні.

**Ключові слова:** Штанги насосні, склопластикові оболонки, сталеві головки, контактні напруги, математична модель.

## ABSTRACT (IN RUSSIAN)

**Цель.** Анализ напряженного состояния соединения стеклопластиковой оболочки со стальной головкой при кручении на примере соединения конструкции насосных штанг с полимерной оболочкой.

**Методика.** Рассматриваемые проблемы сводятся к составлению интегральных уравнений и их решению.

**Результаты.** В результате построены графические зависимости влияния клеевого слоя на контактное напряжение при кручении композитной оболочки с жесткой обоймой и распределения напряжения по толщине композитной оболочки, соединенной с жесткой обоймой.

**Научная новизна.** Заключается в использовании обобщенной теории оболочек типа Тимошенко для решения контактных задач.

**Практическая значимость.** Проведенные исследования позволили разработать методику соединения стеклопластиковых труб со стальными головками при кручении.

**Ключевые слова:** Насосные штанги, стеклопластиковые оболочки, стальные головки, контактные напряжения, математическая модель.

## ABOUT AUTHORS

Maksimuk O.V. Professor of Lviv Ivan Franko National University, st. University 1, Lviv, Ukraine

Kopej B.V. Professor of Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ivano-Frankivsk, Ukraine.

E-mail: [kopeyb@ukr.net](mailto:kopeyb@ukr.net)

Juj Shuanzhuj. Student of Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ivano-Frankivsk, Ukraine.